قال الله تعالى: وَأَعِدُّوا لَهُم مَّا اسْتَطَعْتُم مِّن قُوَّةٍ ﴿الأنفال: 60﴾

الله تعالى فرمايي: او د هغوى لپاره څومره مو چې وس وي قوت تيار کړئ.

ټولو درنو حاضرینو ته

السلام علیکم ورحمة الله وبرکاته

او ښه راغلاست وایم

د دري ګونو انتیګرالونو
د ځینو تطبیقاتو څېړنه

وړاندې کوونکی: څېړنیار سیدنعیم ”سایق“

سریزه

د خلاق خالق په سپېڅلي نامه؛ انسان چې د کائناتو غوره مخلوق دی، د خلقت موخه یې د علم او پوهې په وسیله په نړۍ او طبیعت کې د تفکر او څېړنو له لارې د خپل خالق پېژندل دي، نو ځکه خو له زوکړې سره سم په زده‌کړه پیل کوي، څېړنه او پلټنه کوي او د ژوند په بېلابېلو پړاوونو کې علم او پوهه لاسته راوړي.

په نننۍ نړۍ کې د هرې ټولنې د ودې او پرمختګ لپاره علوم او په هغو کې څېړنه له اصلي محورونو څخه ده چې په هر هېواد کې پرله‌پسې پیشرفت تضمینوي. ټول هغه څه چې موږ یې د تاریخ په مختلفو دورو کې د علومو د پرمختګ په توګه پېژنو، د بېلګې په ډول: معاصر علوم، صنعت، تخنیک، نوي ټکنالوژي (په دې وروستیو کې د (James Web Space Telescope په مرسته د کائناتو او په هغو کې د کهکشانونو څخه اخیستل شوي انځورونه) او د اوسنۍ نړۍ ټول پرمختګونه د پېړیو په اوږدو کې د هغو خلکو د هڅو پایله ده چې په کائناتو، طبیعت او ورځني ژوند کې یې د څېړنې لاره غوره کړې وه چې دا **د اسلام غوښتنه** هم ده.

5 ... په نننۍ تمدن، ساينس، تخنيک، ټکنالوژي، صنعت، اقتصاد او نورو برخو کې د رياضياتو پراخه عملي کارَوَنه د حيرانتيا کچې ته رسېدلي ده. نن ورځ د ډېرى فرهنگي، اجتماعي، اقتصادي، سياسي او داسې نورو ستونزو د حل لپاره له رياضياتو څخه گټه اخيستل کېږي، ځکه اکثره وخت دغه ډول مسايلو ته د رياضي په واسطه نسبتاً عملي ځواب ترلاسه کېږي. د رياضياتو د رول د تشخيص لپاره کافي ده چې موږ بايسکلونو، موټرسايکلونو، موټرو، اورگاډو، الوتکو، بېړيو، توغنديو (راکټونو)، سينماگانو، راډيوگانو او ټلويزيونونو، ټيليفونونو، کمپيوټرونو، انټرنيټ او داسې نورو وسايلو ته يوه ځغلنده کتنه وکړو.

... درياضياتو له مهمو برخو څخه يو هم کالکولس دی چې په حقيقت کې د حرکت او بدلون رياضيات بلل کېږي. کالکولس دوه مهمې برخې لري چې يوه يې ديفرانسيل کالکولس Differential Calculus او بله يې انتيگرال کالکولس Integral Calculus ده. په ديفرانسيل کالکولس کې مشتق او په انتيگرال کالکولس کې انتيگرال مطالعه کېږي. په ورته ډول، دريگوني انتيگرالونه د انتيگرال کالکولس له مهمو موضوعاتو څخه دي چې د طبيعي علومو، په ځانگړې توگه د فزيک او انجنيري په بېلابېلو برخو کې په پراخه کچه کارول کېږي چې په دې رساله کې نوموړې انتيگرالونه د هغوی له ځينو تطبيقاتو سره په هر اړخيز ډول څېړل شوي دي.

لومړی څپرکی

د موضوع شالید

د کالکولس لنډه تاریخچه (له لومړنۍ تر معاصرې دورې پورې)

- ✍ لرغوني دوره
- ✍ منځنۍ دوره
- ✍ معاصره دور

دوهم څپرکی

عمومي معلومات

- ✍ په دیکارتي مختصاتو کې دړې ګوني انتیګرالونه
- ✍ په استوانوي مختصاتو کې دړې ګوني انتیګرالونه
- ✍ په کُـــروي مختصاتو کې دړې ګوني انتیګرالونه
- ✍ د ډایورژنس قضیه

دریم څپرکی

د درې ګونو انتیګرالونو د ځینو تطبیقي مواردو څېړل

I. د درې ګونو انتیګرالونو په مرسته د ځینو جسمونو د حجمونو ترلاسه کول

- ✍ په دیکارتي مختصاتو کې د حجم ترلاسه کول
- ✍ په استوانوي مختصاتو کې د حجم ترلاسه کول
- ✍ په کـــــروي مختصاتو کې د حجم ترلاسه کول

II. مومنټونه او د کتلې مرکز

- ✍ د یو جسم کتله، ستاتیکي مومنټونه او د کتلې مرکز
- ✍ د یو جسم انرشیایي مومنټونه

III. د درې ګونو انتیګرالونو په مرسته د ځینو تطبیقي او تیوریکي مسایلو حل

څلورم څپرکی

- ✍ د درې ګونو انتیګرالونو د محاسبوي اسانتیاوو شودنه
- ✍ د درې ګونو انتیګرالونو د تطبیقي مؤثریت ارزونه

د کالکولس لنډه تاریخچه (له لومړنی تر معاصرې دورې پورې)

I. لرغونې دوره

II. منځنی دوره

✍هند

✍منځنی ختیځ

III. معاصره دوره

✍لومړنی معاصره دوره

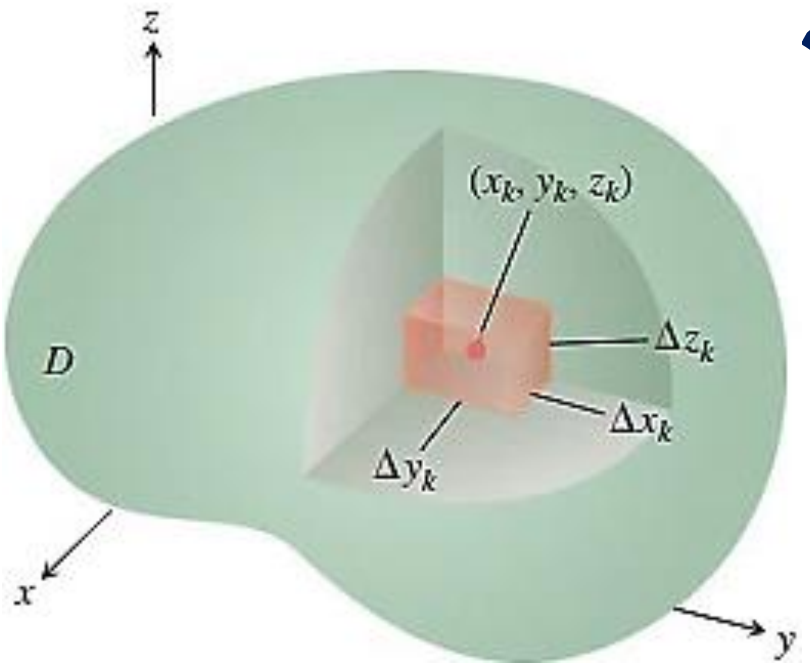
✍وروستی معاصره دوره

د درېيو ګونو انټيګرالونو د مفهومونو توضيح

DESCRIPTION OF THE TRIPLE INTEGRAL’S CONCEPTS

د درېي ګوني انټيګرال پېژندنه

I. په ديکارتي مختصاتو کې درېي ګوني انټيګرالونه



1. شکل: په کوچنيو مستطيلو ټوټو د يو جسم وېشنه ښيې، چې د هرې يوې حجم Δv_k دی.

موږ په هر مکعب مستطیل کې د (x_k,y_k,z_k) يو ټکی ټاکو، دا پروسه د n مکعب مستطیلونو لپاره سرته رسوو او لاندې مجموعه لاسته راوړو

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta v_k \qquad (1)$$

که د مکعب مستطیلونو شمېر n بې نهایت زیات شي، د وېشنې نورم صفر ته نژدې کېږي $\|P\| \to 0$، نو په دې حالت کې پورته مجموعه S_n يو لیمتي قیمت ته نژدې کېږي چې دغه لیمټ ته د D ناحیې پرمخ د F درې ګونی انتیګرال وایې او داسې لیکل کېږي

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(x,y,z)dV \quad \text{یا} \quad \lim_{\|P\|\to 0} S_n = \iiint_D F(x,y,z)\, dxdydz \quad (2)$$

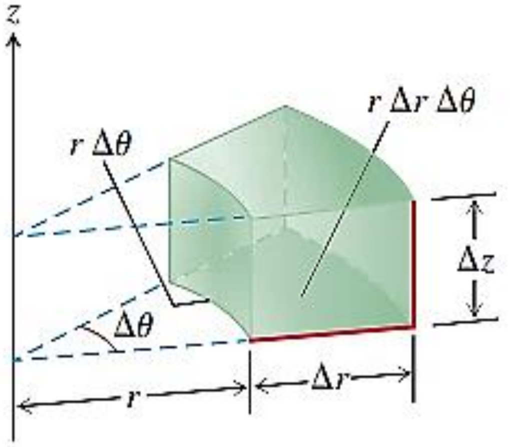
تعریف: که چېرې د F تابع د يو جسم په واسطه د محدودې شوې ناحیې D پرمخ متمادي وي، نو په دې حالت کې د F درې ګونې انتیګرال په D باندې مساوي دي په

$$\iiint_D F(x,y,z)dV = \lim_{\|P\|\to 0} S_n = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta v_k$$

په استوانوي او کُروي مختصاتو کې درې ګوني انتيګرالونه

TRIPLE INTEGRALS IN CYLINDRICAL AND SPHERICAL COORDINATES

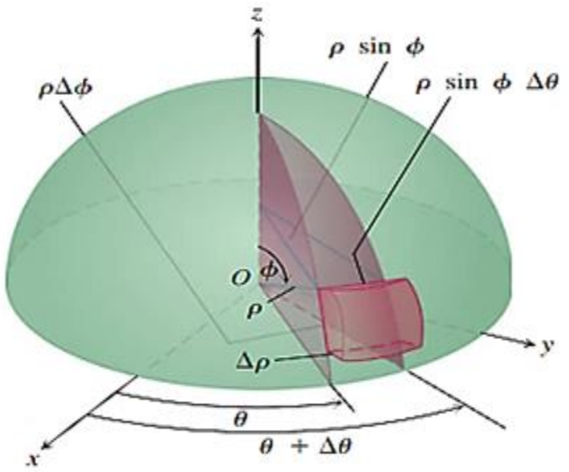
I. په استوانوي مختصاتو کې درې ګوني انتيګرالونه



$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f(r,\theta,z)dV = \iiint_D f(r,\theta,z)dzrdrd\theta \quad (3)$$

2. شکل: داستوانوي ټوټې تقريبي حجم $\Delta V = \Delta z\, r\, \Delta r\, \theta$

II. په کُروي مختصاتو کې درې ګوني انتيګرالونه



$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f(\rho,\phi,\theta)dV = \iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\rho^2 sin\phi d\rho d\phi d\theta \quad (4)$$

3. شکل: دکُروي ټوټې حجم تقريباً د يو مکعب له حجم سره مساوي دی

1.جدول: د مختصاتو د اوښتون (تبدیل) فورمولونه		
استوانوي مختصات دیکارتي مختصاتو ته	ګروي مختصات دیکارتي مختصاتو ته	ګروي مختصات استوانوي مختصاتو ته
$x = rcos\theta$	$x = \rho sin\phi cos\theta$	$r = \rho sin\phi$
$y = rsin\theta$	$y = \rho sin\phi sin\theta$	$z = \rho cos\phi$
$z = z$	$z = \rho cos\phi$	$\theta = \theta$
په درې ګونې انتیګرال کې د حجم دیفرانسیل dV لپاره اړوند فورمولونه:		
په دیکارتي مختصاتو کې	په استوانوي مختصاتو کې	په ګُروي مختصاتو کې
$dV = dxdydz$	$dV = dzrdrd\theta$	$dV = \rho^2 sin\phi d\rho d\phi d\theta$

د درې ګونو انتیګرالونو ځانګړتیاوې

که چیرې د $f(x,y,z)$ او $g(x,y,z)$ توابع د D په ناحیه باندې انتیګرال منونکي وي، نو په دې حالت کې لاندې اړیکې سمې دي.

1. $\iiint_D c\, f(x,y,z)dV = c\iiint_D f(x,y,z)dV$

2. $\iiint_D [f(x,y,z) + g(x,y,z)]dV = \iiint_D f(x,y,z)dV + \iiint_D g(x,y,z)dV$

3. $\iiint_D [f(x,y,z) - g(x,y,z)]dV = \iiint_D f(x,y,z)dV - \iiint_D g(x,y,z)dV$

4. $\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_{D_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{D_2} f(x,y,z)dV$

5. $\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_D 1dV = \iiint_D dV = V(D)\,;\ \left[\sum_{k=1}^{n} \Delta v_k = V\right]$

د درېڅونو انتیګرالونو محاسبه کول

1. قضیه: د فوبیني قضیې ساده بڼه Fubini’s Theorem Simple Form:

د فوبیني قضیې ساده بڼه بیانوي چې: که چېرې د f تابع په یوه مستطیلي ناحیه $D=[a,b]\times[c,d]\times[k,l]$ باندې متمادي وي، نو په نوموړې ناحیه باندې یې درېګونی انتیګرال مساوي دی په

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\int_c^d\int_k^l f(x,y,z)dxdydz \qquad (5)$$

په پورته اړیکه کې د ښي لوري انتیګرال په دې معنا دی چې موږ لومړی نظر x ته (د y او zپه ثابت ساتلو سره)، بیا نظر y ته د (x او z په ثابت ساتلو سره) او په پای کې مو نظر z ته د (د x او y په ثابت ساتلو سره) انتیګرال نیولی دی.

2. قضيه: د فوبيني د قضيې عمومي بڼه *Fubini's Theorem General Form*

که چېرې د $f(x,y,z)$ تابع د D په ناحيه باندې متمادي وي، نو

1. که چېرې D د xy په مستوي کې يوه ناحيه وي چې له پورته او ښکته خوا څخه په ترتيب سره د $z = g_2(x,y)$ او $z = g_1(x,y)$ سطحو په واسطه محدوده شوې وي او R په ياده مستوي کې د هغې ارتسام وي، نو دې ناحيې ته لومړۍ ډول ناحيه وايي او انتيګرال يې مساوي دی په

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA \qquad (6)$$

2. که چېرې D د yz په مستوي کې يو يوه ناحيه وي چې د شا له لورې د $x = g_2(y,z)$ او د مخې له خوا د $x = g_1(y,z)$ سطحې په واسطه محدوده شوې وي او R يې د xy په مستوي کې ارتسام وي، نو دغه ناحيه دوهم ډول ناحيه ده او انتيګرال يې داسې محاسبه کېږي

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right] dA \qquad (7)$$

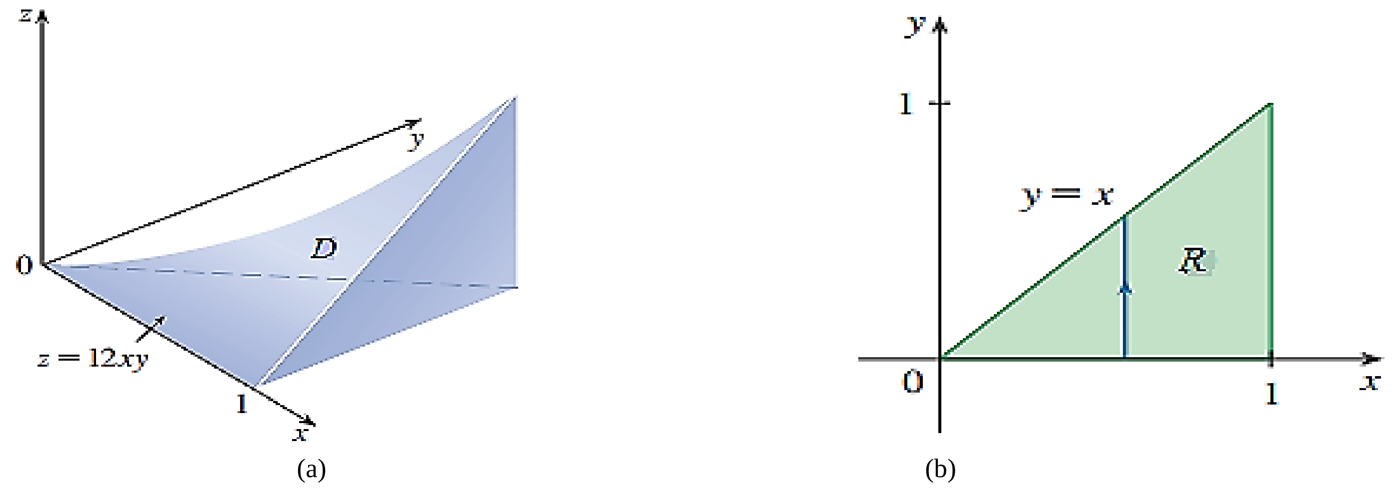
3. که چېرې D د xz په مستوي کې يوه ناحيه وي چې د کيڼ لورې څخه د $y = g_1(x,z)$ او له ښي خوا نه د $y = g_2(x,z)$ سطحې په واسطه محدوده شوې وي او R يې د xz په مستوي باندې ارتسام وي، نو ياده ناحيه درېيم ډول ناحيه ده چې انتيګرال يې داسې دی

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right] dA \qquad (8)$$

1. مثال: غواړو د $\iiint_D z\,dV$ انتیګـرال قیمت چې د D جسم په لومړۍ ربعه کې د $z = 12xy$ سطحې او $y = x, x = 1$ مستوي ګانو په واسطه محدود شوی وي، ترلاسه کړو.

حل: لومړی موږ د D ناحیه او د هغې د مرتسم ګراف رسموو؛ یعنې کله چې موږ یو درې‌ګونی انتیګرال شمېرو، نو غوره دا ده چې دوه ګرافونه رسم کړو: یو د جسم D (4a) شکل او بل د یوې لومړۍ ډول ناحیې لپاره د xy په مستوي کې د هغې د مرتسم ګراف (4b) شکل. د جسم D ښکتنۍ سرحد د $z = 0$ او پورتنۍ سرحد یې د $z = 12xy$ سطحه ده، نو موږ د (4) اړیکې له مخې $g_1(x,y) = 0$ او $g_2(x,y) = 12xy$ کاروو. د یادولو وړ ده چې د xy په مستوي باندې د D مرتسم د R (5b) شکل سره سم، یوه مثلثي ناحیه ده چې داسې یې تعریفوو

$$D = \{(x, y, z) / \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 12xy\}$$



4. شکل: د D جسم او د هغه د مرتسم ښيي

د D د تعريف له مخې د لومړی ډول ناحيې په توګه، راکړل شوی انتيګرال کولای شو په لاندې ډول محاسبه کړو

18

$$\iiint_D z\,dV = \int_0^1 \int_0^x \left[\int_0^{12xy} z\,dz\right] dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=12xy} dydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^x (12xy)^2 dydx$$

$$= 72 \int_0^1 \int_0^x x^2 y^2\, dy\, dx$$

$$= 72 \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= 24 \int_0^1 x^5\, dx$$

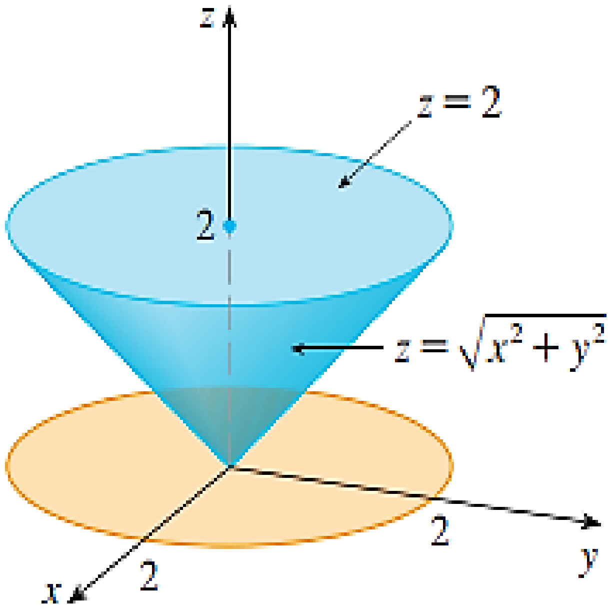
$$= 24 \left[\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=1} = 4.$$

2. مثال: غواړو چې لاندې انتيګرال د استوانوي مختصاتو په کارولو سره محاسبه کړو؛

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx=?$$

حل: ګورو چې د پورته انتيګرال ساده کول په ديکارتي مختصاتو کې خورا ستونزمن دی. دغه مکرر انتيګرال د D پرمخ يو درې ګونی انتيګرال دی چې د ناحيې ارتسام د xy په مستوي باندې د (7) شکل سره سم $(x^2+y^2)\le 4$ دی، د ناحيې ښکتنۍ سطحه د $\sqrt{x^2+y^2}$ مخروط، پورتنۍ سطحه يې د $z=2$ مستوي ده او داسې تعريف شوې ده

$$D=\left\{(x,y,z)/\ -2\le x\le 2,-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\right\}$$



5. شکل: د انتيګرال نيولو ناحيه D او د هغې ارتسام ښيي

په استوانوي مختصاتو کې د پورته انتیګرال د محاسبې لپاره، لومړی د D ناحیه په استوانوي مختصاتو کې ښيو

$$D = \{(r, \theta, z) | \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq r \leq 2, \qquad r \leq z \leq 2\}$$

اوس د راکړل شوي انتیګرال قیمت داسې ترلاسه کوو

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx = \iiint_D (x^2 + y^2)\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2\, dz\, r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3\, [z]_r^2 dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3\, (2 - r) dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{5} r^5\right]_0^2$$

$$= \frac{16}{5}\pi.$$

3. مثال: غوارو دغه $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ انتيگرال محاسبه کړو، داسې چې D واحد توپ (واحده کُره یا هغه کُره چې شعاع يې يو واحد ده) او په لاندې ډول تعريف شوې ده.

$$D = \{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

حل: د پورته درې‌گوني انتيگرال محاسبه به له کُروي مختصاتو څخه پرته، ډېره ستړې کوونکې وي. څرنگه چې د D سرحد يوه کُره ده، نو له کُروي مختصاتو څخه په گټه اخيستنه لرو چې

$$D = \{(\rho, \theta, \phi)|\ 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

له بل لوري څخه $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ دی، نو ترلاسه کوو چې

$$\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} \, d\rho$$

$$= \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi} \Big[\theta\Big]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e-1).$$

د ډايورژنس قضيه THE DIVERGENCE THEOREM

که $F = Mi + Nj + Pk$ يوه داسې وکټوري ساحه وي چې مؤلفې يې لومړی ترتیب قسمي مشتقاتو لرونکي وي او S يوه همواره، تړلي او جهت لرونکي سطحه وي، نو د F وتونکی جریان د S له سطحې څخه د سطحې د n نورمال وکټور په جهت، د سطحې په واسطه د محدودې شوي ناحیې D پرمخ د ساحې د ډايورژنس له درې ګوني انتیګرال سره مساوي دی، یعني

$$\underbrace{\iint_S F \cdot n\, d\sigma}_{Outward\ flux} = \underbrace{\iiint_D \nabla \cdot F\, dV}_{Divergence\ Integral} = \underbrace{\iiint_D div\, F\, dV}_{Divergence\ Integral} \qquad (9)$$

د یادولو وړده چې که چیري د یوې وکټوري ساحې ډايورژنس صفر شي، نو دا په دې معنی ده چې په ناحیه باندې ورودي جریان له هغې څخه د وتونکې (خروجي) جریان سره مساوي دی.

د ډايورژنس قضیه ځینې وخت داسې هم لیکل کیږي

$$\underbrace{\oiint_S F \cdot n\, d\sigma}_{Outward\ flux} = \underbrace{\iiint_D \nabla \cdot F\, dV}_{Divergence\ Integral} = \underbrace{\iiint_D div\, F\, dV}_{Divergence\ Integral} \qquad (10)$$

د درېګونو انتیګرالونو د تطبیقي مواردو څېړل

1. د درې ګونو انتیګرالونو په مرسته د ځینو جسمونو د حَجمونو ترلاسه کول

که چېرته د درېګوني انتیګرال په تعریف؛ یعنې (2) اړیکه کې $F(x,y,z) = 1$ په پام کې و نیسو، نو په دې حالت کې د D ناحیې حجم لاسته راځي. په ورته ډول، که په استوانوي مختصاتو کې $f(r,\theta,z) = 1$ و نیسو، نو د (7) اړیکې له مخې د D ناحیې حجم ترلاسه کېږي. همدارنګه، که په کُروي مختصاتو کې $f(\rho,\phi,\theta) = 1$ و ټاکو، نو د (10) اړیکې له مخې د Dناحیې حجم حاصلېږي.

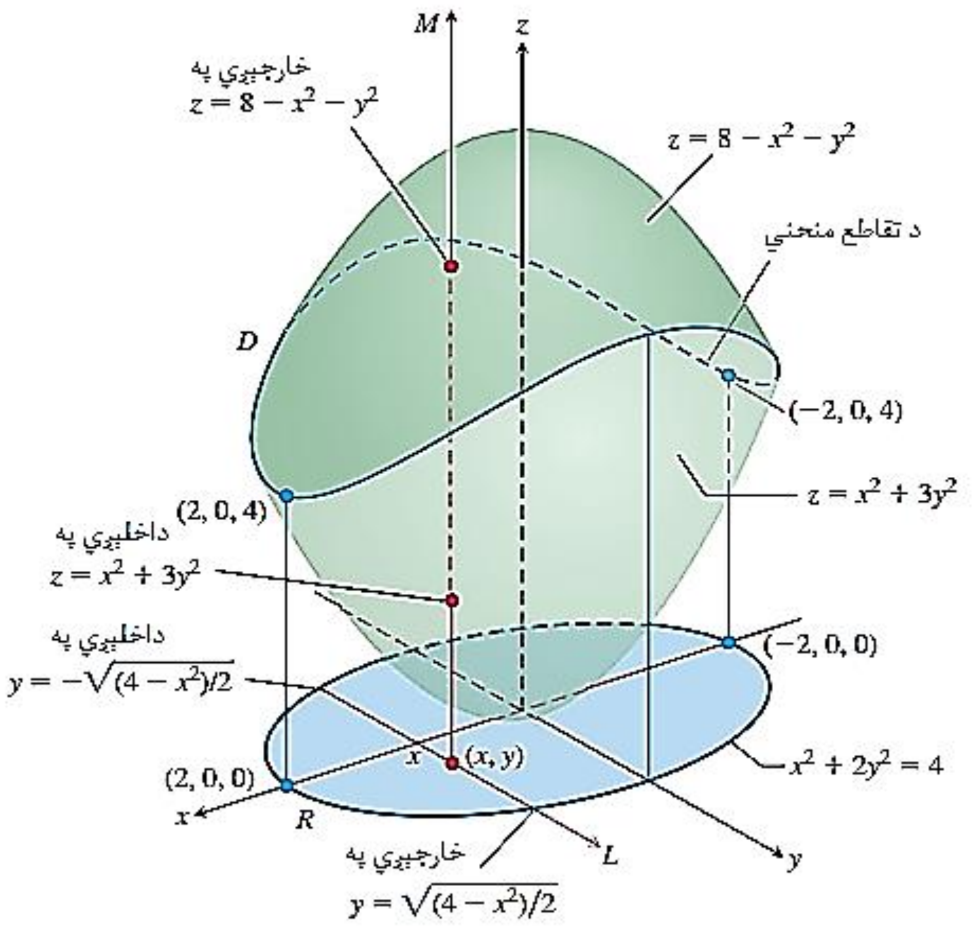
$$V = \iiint_D 1\, dV = \iiint_D dx\, dy\, dz \tag{10}$$

$$V = \iiint_D 1\, dV = \iiint_D dz\, r dr d\theta \tag{11}$$

$$V = \iiint_D 1\, dV = \iiint_D \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \tag{12}$$

4. مثال: د هغه ناحیې حجم ترلاسه کوو چې د $z = x^2 + 3y^2$ او $z = 8 - x^2 - y^2$ سطحو په واسطه محصور شوي وي.

حل: د انتیگرال د پولو د ترلاسه کولو لپاره لومړی د انتیگرال نیولو ناحیه د (6) شکل سره سم رسموو.

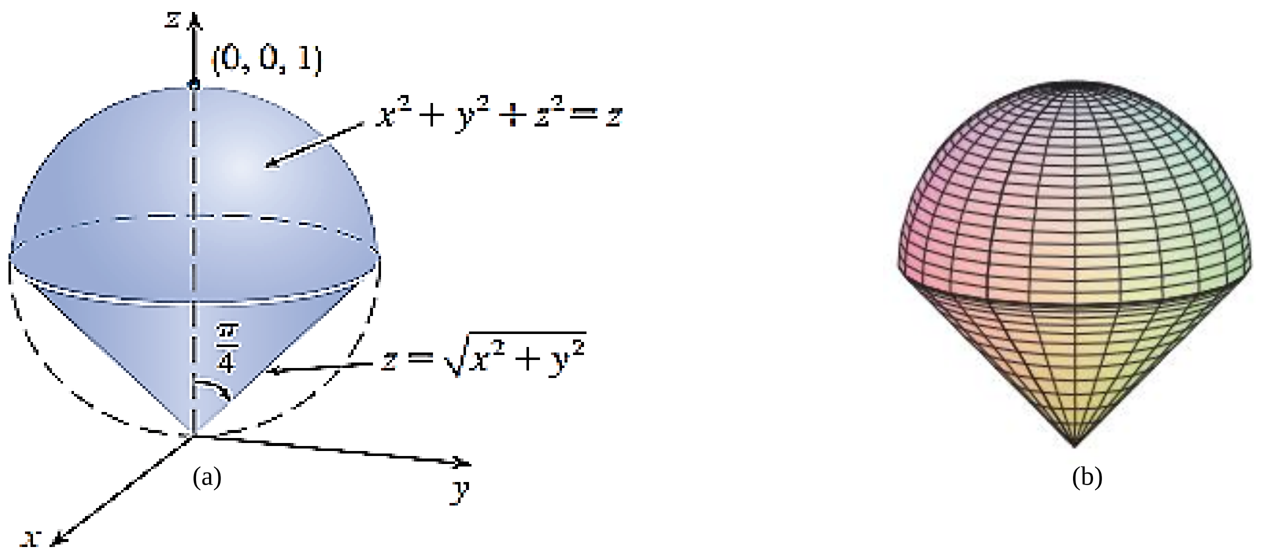


6. شکل: د D ناحیه چې د دوه پارابولوئیدونو په واسطه محصور شوی ده ښیي

نو د شکل له مخې د جسم D حجم مساوي دی په

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_D dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\left(8-2x^2-4y^2\right) dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[(8-2x^2)y-\frac{4}{3}y^3\right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left(2(8-2x^2)\sqrt{(4-x^2)/2}-\frac{8}{3}\left((4-x^2)/2\right)^{3/2}\right) dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{(4-x^2)}{2}\right)^{3/2}-\frac{8}{3}\left(\frac{(4-x^2)}{2}\right)^{3/2}\right] dx \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}\left((4-x^2)\right)^{3/2} dx \quad ; \quad [x = 2\sin u] \\
&= 8\pi\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

5. مثال: د کُروي مختصاتو په کارولو سره د هغه جسم حجم چې د $z=\sqrt{x^2+y^2}$ مخروط له پاسه او د $z = x^2+y^2+z^2$ کُرې لاندې د (7) شکل په څېر پروت دی، لاسته راوړو.



7. شکل: هغه جسم چې د مخروط له پاسه او د کُرې لاندې پروت دی

حل: پام مو وي چې کُره له مبداء څخه تېرېږي او مرکز يې د $(0,0,1/2)$ ټکی دی، نو موږ د کُرې معادله داسې لیکو

$$x^2+y^2+z^2=z \Rightarrow \rho^{\,2}=\rho\cos\phi \Rightarrow \rho=\cos\phi$$

په ورته ډول، د مخروط معادله هم لیکو؛ یعنې

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{\rho^{\,2}\sin^2\phi\cos^2\theta+\rho^{\,2}\sin^2\phi\sin^2\theta}=\rho\sin\phi$$

$$\rho\cos\phi=\rho\sin\phi \Rightarrow \cos\phi=\sin\phi \Rightarrow \phi=\pi/4\,.$$

بناءً، د D ناحیه په کُروي مختصاتو کې په لاندې ډول بیانیږي

$$D=\{(\rho,\theta,\phi)|\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\qquad 0\le\phi\le\pi/4\,,\qquad 0\le\rho\le cos\phi\}$$

په دې توګه، د جسم حجم مساوي دی په

$$\begin{aligned}
V&=\iiint_D dV=\iiint_D \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{cos\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\phi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=cos\phi}d\phi\,d\theta\\
&=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\sin\phi\,cos^3\phi\,d\phi\\
&=\frac{2\pi}{3}\left[-\frac{cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

ناهمواره کُره او دهغې حَجم Bumpy Sphere and It's Volume: ناهموارې کرُې عمومي معادله دا ده

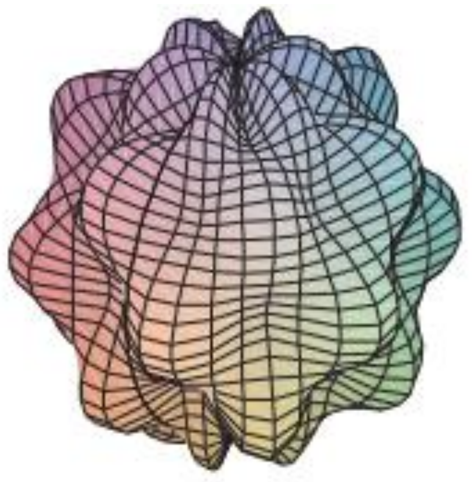
$$\rho(\theta,\phi)=1+\frac{1}{5}\sin(m\theta)\sin(n\phi)=1+\mathrm{r}\sin(m\theta)\sin(n\phi)\,;\quad\left(r=\frac{1}{5}\right)$$

چې په هغې کې m او n مثبت تام عددونه دي. حجم کولای شو د لاندې اړیکې له مخې لاسته راوړو

$$V=\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{0}^{1+\mathrm{r}\sin(m\theta)\sin(n\phi)}\left(\rho^2 sin\phi\right)d\rho d\theta d\phi \qquad (16)$$

6. مثال: د $m=6$ او $n=5$ لپاره ناهموارې کُرې حجم چې په (8) شکل کې ښودل شوي ده، لاسته راوړو.

حل: دا چې جسم د $\rho=1+{}^{1}/_{5}\,sin\,6\theta\,cos\,5\phi$ سطحې پـــه واسطه محــصــور شــوی دی، نـــو په کُروي مختصاتو کې داسې بیانیږي



8. شکل: ناهمواره کرُه ښیي

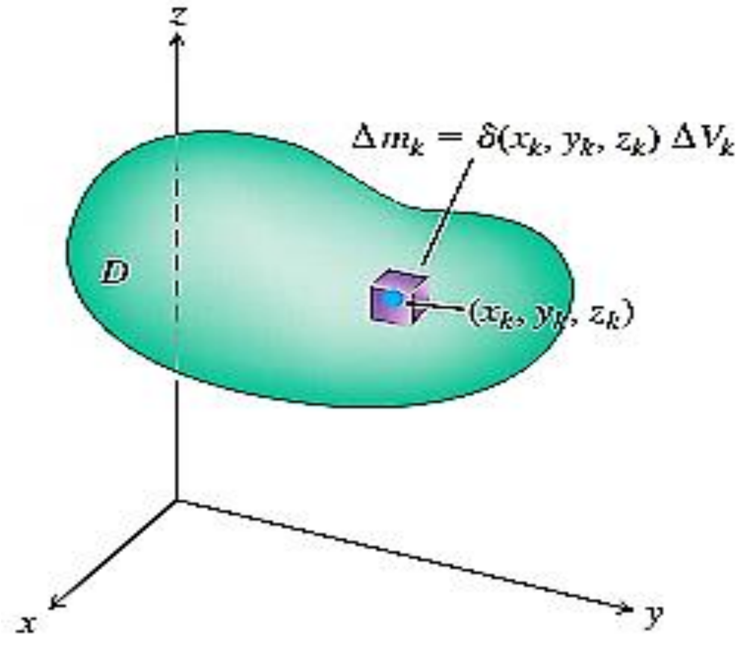
$$D=\left\{(\rho,\theta,\phi)/0\le\rho\le 1+{}^{1}/_{5}\,sin\,6\theta\,cos\,5\phi,0\le\theta\le 2\pi,0\le\phi\le\pi\right\}$$

$$V(D)=\iiint_D dV=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1+{}^{1}/_{5}sin\,6\theta\,cos\,5\phi}\rho^2 sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi=\frac{136\pi}{99}$$

2. مومنټونه او د کتلې مرکز MOMENTS AND CENTER OF MASS

I. د یو جسم کتله، لومړني مومنټونه او د کتلې مرکز

د یو جسم کتله



9. شکل: په کتلوي عناصرو Δm_k د D جسم وېشنه ښيي

$$\delta = {}^{M}/_{V}$$

$$\delta(x,y,z) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \tag{13}$$

د k-ام کتلوي عنصر کتله د (9) شکل سره سم

$$\Delta m_k = \delta(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

$$M = S_n \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \sum_{k=1}^{n} \delta(x,y,z)\Delta V_k \tag{14}$$

$$M = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x,y,z)\Delta V_k \tag{15}$$

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x,y,z)\Delta V_k = \iiint_D \delta(x,y,z)\,dV \tag{16}$$

لومړني يا ستاتيکي مومنټونه: ستاتيکي مـــومنټ د يو جسم د کتلې د مـــرکز په ټاکلو کې کارول کېږي. پوهېږو چې ستاتيکي مومنټ د کتــلې او فـــاصلې حاصل ضرب دی، نو د yz مستوي په چاپېر لومړنی مومنټ مساوي دی په

$$M_{yz} = \iiint_D \underbrace{x}_{\text{فاصله}} \underbrace{\delta(x,y,z)dV}_{\text{کتله}} \qquad (17)$$

په ورته ډول، د xz او xy مستويگانو په چاپېر لومړني مومنټونه مساوي دي په

$$M_{xz} = \iiint_D y\,\delta(x,y,z)dV \qquad (18)$$

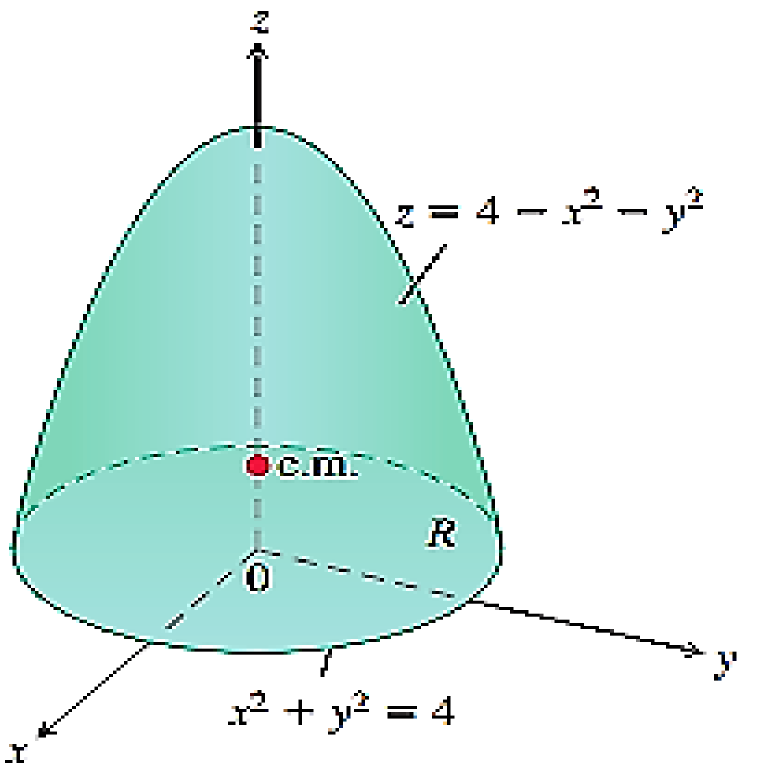
$$M_{xy} = \iiint_D z\,\delta(x,y,z)dV \qquad (19)$$

➢ **د کتلې يا ثقل مرکز** : دکتلې مرکز د لـومړني مومنټ په واسطه ترلاسه کېږي، د بېلگې په ډول:

که $C.M\,(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ د يو جسم د کتلې مرکز وي، نو مختصات يې داسې په لاس راځي

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \overline{y} = \frac{M_{xy}}{M} \qquad (20)$$

7. مثال : غواړو د هغه جسم د کتلي مرکز چې کثافت δ يې ثابت، له ښکته خوا څخه د $R: x^2 + y^2 \leq 4$ ډسک په واسطه د $z = 0$ په مستوي کې او له پورته خوا څخه د $z = 4 - x^2 - y^2$ پارابولوئيد په واسطه د (10) شکل سره سم محدود شوې وي، ترلاسه کړو.



10. شکل: جسم چې د ډسک او پارابولوئيد په واسطه محدود شوی دی.

حل: له تناظر څخه په ګټه اخیستنه له شکل څخه کولای شو ولیکو چې: $\bar{x} = \bar{y} = 0$، نو د $\bar{z}$ د ترلاسه کولو لپاره لومړی د xy مستوي په چاپیر لومړنی یا ستاتیکي مومنټ M_{xy} ترلاسه کوو؛ یعنې

$$M_{xy} = \iiint_D z\,\delta(x,y,z)dV$$

$$= \iint_R \left[\int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\ dz\right]\delta\,dy\,dx$$

$$= \iint_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta\,dy\,dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\iint_R \left(4-x^2-y^2\right)^2 dy\,dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4-r^2\right)^2 r\,dr\,d\theta\ ;[polar\ Coordi\ \ldots]$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{6}\left(4-r^2\right)^3\right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \frac{16\,\delta}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}.$$

په ورته ډول، د جسم کتله ترلاسه کوو

$$M=\iiint_D \delta\, dV = \iint_R \left[\int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} dz\right]\delta\, dy\, dx$$

$$=\delta\iint_R \left(4-x^2-y^2\right)\, dy\, dx = \delta\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(4-r^2\right) r\, dr\, d\theta$$

$$=\delta\int_0^{2\pi}\int_0^{2} 4r-r^3\, dr\, d\theta = \delta\int_0^{2\pi}\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta$$

$$=\delta\int_0^{2\pi} 4\, d\theta = 4\delta\int_0^{2\pi} d\theta = 4\delta(2\pi) = 8\delta\pi.$$

له دې څخه په لاس راوړو چې

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{32\pi\delta/3}{8\delta\pi}=4/3\,.$$

نو په پای کې د جسم د کتلې مرکز $C.M(0,0,4/3)$ لاسته راځی. له بله پلوه، څرنگه چې د جسم کثافت ثابت دی، نو وایو چې د کتلې مرکز د جسم هندسي مرکز بلل کېږي چې د تناظر په محور پروت دی.

MOMENT OF INERTIA OF A SOLID د يو جسم انرشيايي مومنټونه

عطالتي مومنټ د کتلې او فاصلې مربع حاصل ضرب دی.کله چې د يوې کتلې m کوچنۍ ذره د يوې ثابتې کرښې څخه د d فاصله ولري، نو د کرښې په چاپېر يې عطالتي مومنټ داسې تعريفېږي.

$$I = md^2 = (\text{کتله})(\text{فاصله})^2 \tag{21}$$

نو پورته تعريف ته په کتو سره په فضا کې د يو جسم عطالتي مومنټ د x په محور د درېګونو انتيګرالونو له مخې کولای شو داسې وليکو

$$I_x = \iiint_D \underbrace{(y^2 + z^2)}_{\text{فاصله مربع}} \underbrace{\delta(x, y, z)dV}_{\text{کتله}} \tag{22}$$

په همدې ترتيب y او z محورونو په چاپير داسې لاسته راځي.

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)dV \tag{23}$$

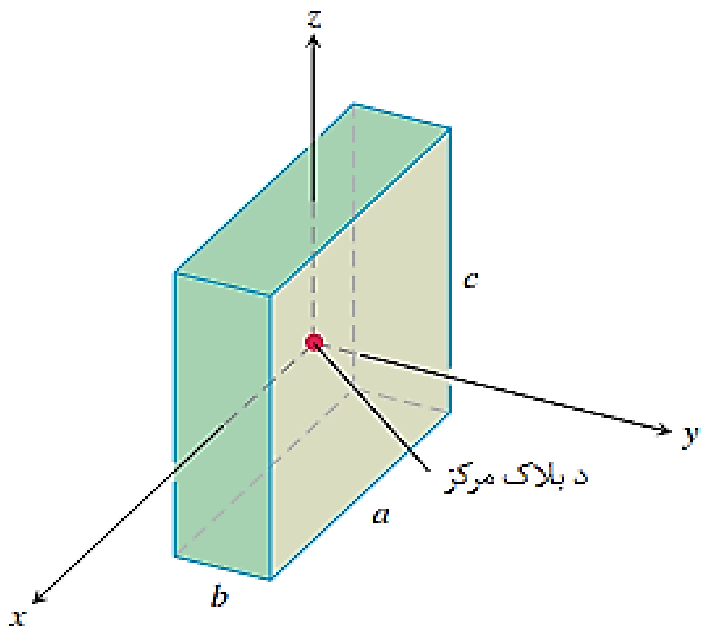
همدارنګه، که L د z محور وي، نو $r^2 = x^2 + y^2$ دی او عطالتي مومنټ يې مساوي دی په

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)dV \tag{24}$$

او د مبداء په چاپېر عطالتي مومنټ مساوي دی په

$$I_0 = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\delta(x, y, z)dV \tag{25}$$

8. مثال: غواړو چې د (11) شکل سره سم د یو مستطیلي جسم لپاره I_x,I_y او I_z ترلاسه کړو، په هغه حالت کې چې د جسم کثافت δ ثابت وي.



11. شکل: مستطیلي جسم (بلاک) ښیي

حل: د I_x لپاره لرو چې

$$I_x = \iiint_D \left(y^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)dV = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(y^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)dxdydz$$

د $\left(y^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)$ تابع ته په کتو سره چې د y,x او z له جنسه یوه جفته تابع ده، ځکه چې $\delta(x,y,z)$ ثابت دی، کولای شو د انتیگرال له ځینو برخو څخه صرف نظر وکړو. مستطیلي جسم له اتو 8 متناظرو برخو څخه جوړ شوی دی چې په هره ربعه کې یوه برخه شتون لري.

مورږ کولای شو یو له دغو برخو باندې انتیګرال محاسبه کړو او بیا یې په 8 کې ضرب کړو، ترڅو مجموعي قیمت، یا د ټول جسم عطالتي مومنټ د x محور په چاپېر لاسته راشي؛ یعنې

$$I_x = 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2}\left(y^2+z^2\right)\delta\, dxdydz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\left(y^2+z^2\right)dydz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\left[\frac{y^3}{3}+z^2y\right]_{y=0}^{y=b/2} dz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\left(\frac{b^3}{24}+\frac{z^2b}{2}\right)dz$$

$$= 4a\delta\left(\frac{b^3c}{48}+\frac{c^3b}{48}\right)=\frac{abc\delta}{12}\left(b^2+c^2\right);$$

$$= \frac{M}{12}\left(b^2+c^2\right); \qquad M = abc\delta$$

په ورته ډول، I_y او I_zهم ترلاسه کوو؛ یعنې: $I_y = \frac{M}{12}\left(a^2+c^2\right),\quad I_z = \frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right)$

مسئله (په یوه نیمه کُروي کاسه کې د اوبو حجم): یوه نیمه کُروې کاسه چې $5cm$ شعاع لري له پورتنۍ برخې څخه د $3cm$ اوبو سره ډکه شوې ده، غواړو په کاسه کې د اوبو حجم لاسته راوړو.

حل: د کُرې مرکز ته په مبداء کې د اوبو له سطحې سره په $z = -3$ کې قرار ورکوو. له بل لوري د اوبو د حجم ارتسام د xy په مستوي کې $9 = 25 - x^2 - y^2 => x^2 + y^2 = 16$ دی؛ یعنې د $4cm$ په شعاع یوه دایره ده، نو له دې ځایه د استوانوي مختصاتو په کارولو سره د اوبو حجم په کاسه کې مساوي دی په

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_{-\sqrt{25-r^2}}^{-3} dz\, r\, dr\, d\theta$$

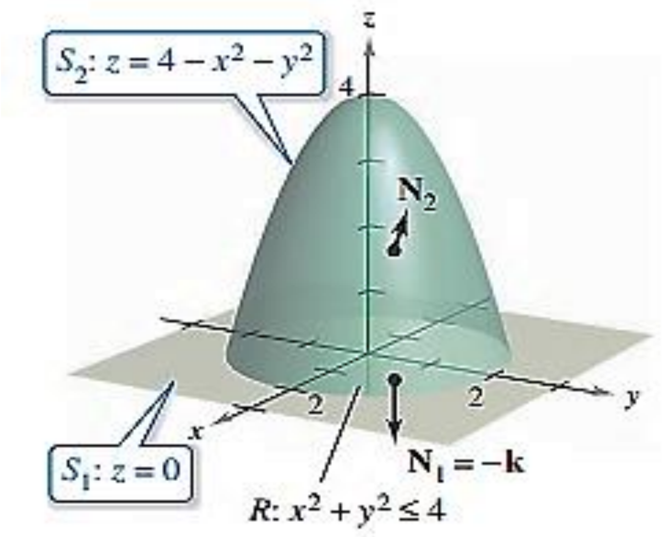
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{4}\left(r\sqrt{25-r^2} - 3r\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(25-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}r^2\right]_0^4 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - 24 + \frac{1}{3}(25)^{\frac{3}{2}}\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{26}{3}\, d\theta = \frac{52\pi}{3}.$$

9. مثال: غــواړو د $F=(x,y,z)=2zi+xj+y^2k$ وکتوري تابع سطحي انتیګرال د $S_1: z=4-x^2-y^2$ پارابولوئیډ او xy مستوي $S_2: z=0$ سطحو پرمخ چې د D جسم یې د (12) شکل سره سم محدود کړی دی، و شمېرو.



حل: له شکل څخه پوهېږو چې د S_1 سطحې لپاره باندینی نورمال وکتور $N_1=-k$، په داسې حال کې چې د S_2 سطحې نورمال وکتور مساوي دی په

$$N_2=\frac{2xi+2yj+k}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

نو موږ د S_1 او S_2 سطحو پرمخ په بېلا بېل ډول سطحي انتيګرال لاسته راوړو او پايلې يې سره جمع کوو؛ يعنې

$$\iint_S F\cdot N\,dS=\iint_{S_1} F\cdot N_1\,dS+\iint_{S_2} F\cdot N_2\,dS$$

$$=\iint_{S_1}\left(2zi+xj+y^2k\right)(-k)\,dS+\iint_{S_2}\left(2zi+xj+y^2k\right)\left(\frac{2xi+2yj+k}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right)dS$$

$$=\iint_R -y^2\,dA+\iint_R \left(4xz+2xy+y^2\right)dA$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} -y^2\,dx\,dy+\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\left(4xz+2xy+y^2\right)dx\,dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\left(-y^2+4xz+2xy+y^2\right)dx\,dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(4xz+2xy)\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\left(4x\left(4-x^2-y^2\right)+2xy\right)dx\,dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\left(16x-4x^3-4xy^2+2xy\right)dx\,dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[8x^2-x^4-2x^2y^2+x^2y\right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\,dy=\int_{-2}^{2}0\,dy=0.$$

خو د ډایورژنس د قضیې له مخې کولای شو پورته مثال په ډېر لږ وخت او ساده ډول محاسبه کړو؛ یعنې

$$\underbrace{\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma}_{\text{Outward flux}} = \underbrace{\iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV}_{\text{Divergence Integral}} = \underbrace{\iiint_D div\,\boldsymbol{F}\,dV}_{\text{Divergence Integral}}$$

وړاندې تر دې چې موږ نوموړې قضیه عملي کړو، لومړی د وکتوري تابع ډایورژنس لاسته راوړو

$$div\,F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2z) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial P}{\partial z}(y^2)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\iint_S F\cdot n\,dS = \iiint_D div\,F\,dV$$

$$= \iiint_D 0\,dV = 0$$

پايلې

1. د معمولي او دوه‌گونو انتيگرالونو په څېر د درې‌گونو انتيگرالونو د شمېرلو لپاره ډېر لږ د هغو له تعريف څخه کار اخيستل کېږي...

2. د درې‌گونو انتيگرالونو په مرسته کولای شو د هغو جسمونو حجمونه چې د منحني سطحو په واسطه محصور شوي وي ...

3. د درې‌گونو انتيگرالونو په مرسته کولای شو د ناهموارې کُرې حجم کوم ...

4. سربېره پر دې، د درې‌گونو انتيگرالونو په مرسته کولای شو ځينې فزيکي او ميخانيکي کميتونه لکه: کتله، ...

5. د سطحي انتيگرالونو ستونزمن مسايل چې د فزيک او انجنيري په مختلفو برخو کې لکه الکتروستاتيک، د سيالاتو ډيناميک، د سيالاتو ميخانيک، الکترو مقناطيس او هايدرو ډيناميک کې کارول کېږي د ډايورژنس د قضيې ...

وړاندیزونه

د دې علمي - څېړنیزې رسالې پایلو ته په کتو سره وړاندیز کوو چې:

1. دا چې د درې ګونو انتیګرالونو څینې مسایل د مستطیلي مختصاتو په پرتله په استوانوي او کُروي مختصاتو کې په ساده ډول محاسبه کېږي، نو دغه ډول مسئلې باید ...

2. که چېري د هغو جسمونو حجمونه غوښتل شوي وي چې د منحني سطحو په واسطه محصور شوي وي، باید له درې ګونو...

3. د هغو جسمونو کتله، د کتلې مرکز، ستاتیکي او عطالتي مومنټونه چې لاسته راوړل یې په معمولي او دوه ګونو انتیګرالونو سره ممکن نه دي، باید درې ګوني انتیګرالونو ...

4. د سطحي انتیګرالونو د څینې مغلقو او پېچلو مسئلو محاسبه مستقیماً د سطحي انتیګرالونو له مخې ستونزمنه ده، نو په دې صورت کې باید د ډایورژنس له قضیې..

[redacted]

و من الله التوفيق

له توجه او حوصلي څخه مو نړۍ مننه

از توجه و حوصله مندی شما جهان سپاس

THANKS FROM YOUR PATIENCE AND ATTENTION

پوښتنې